

Негосударственное частное образовательное учреждение
высшего образования
"Алтайский экономико-юридический институт"
Кафедра общих математических и естественнонаучных дисциплин

УТВЕРЖДАЮ
Ректор Алтайского экономико-
юридического института
В. И. С. Иванов
" 24 " августа 2016 г.



ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине

Математический анализ

для направления 38.03.01 Экономика
квалификация (степень) "бакалавр"
Профиль подготовки
"Финансы и кредит"

Барнаул 2016

1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

1.1. Область применения

Фонд оценочных средств – является неотъемлемой частью учебно-методического комплекса учебной дисциплины «Математический анализ» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу данной дисциплины.

1.2. Контролируемые компетенции

| Код контролируемой компетенции | Этап формирования компетенции | Способ оценивания | Оценочное средство |
|---|--------------------------------------|--------------------------|---|
| ОК-7: способность к самоорганизации и самообразованию | базовый | Экзамен | Комплект контролирующих материалов для экзамена |

Показатели оценивания компетенций представлены в разделе «Требования к результатам освоения дисциплины» рабочей программы дисциплины «Математический анализ» с декомпозицией: знать, уметь, владеть.

При оценивании сформированности компетенций по дисциплине «Математический анализ» используется 100-балльная шкала.

| | | |
|--|--------|---|
| Профессиональный уровень “5” (отлично) | 85-100 | Ответ хорошо структурирован; полное понимание исследуемого вопроса; полный и глубокий анализ вопроса; критическое использование теории и рекомендуемого материала для чтения; расширение и углубление лекционного материала; аргументированная логика; продуманность, творческий и оригинальный подход к освещению вопроса; иллюстративность массой примеров и данных |
| Продвинутый уровень “4” (хорошо) | 70-84 | Хорошая организация, но ряд несущественных упущений в плане содержания; умение аргументировать и использовать примеры; некоторое расширение и углубление лекционного материала; использование соответствующих концептуальных моделей |

| | | |
|--|-------|---|
| Базовый уровень “3” (удовлетворительно) | 60-69 | Удовлетворительный уровень, есть ряд существенных упущений; слабые места в стилевом оформлении, структуре и анализе; в основном базируется на лекционном материале; информация представлена четко, но отсутствует оригинальность в ее изложении |
| Минимальный уровень “2” (неудовлетворительно) | 35-59 | Неудовлетворительное выполнение; частичное понимание проблемы; несмотря на наличие ряда весьма удачных мест, работа характеризуется отсутствием тщательного анализа; неадекватность примеров |
| Минимальный уровень “1” (неудовлетворительно) | 0-34 | Отсутствие понимания вопроса, работа не структурирована и не соответствует требованиям; наличие серьезных ошибок и несоответствий |

Рейтинговая система для оценки успеваемости студентов

Разбивка баллов.

Промежуточный рейтинг – 70 баллов:

1) Рейтинг работы студента на практических занятиях – 22 балла.

Максимальный рейтинг, который студент может заработать на одном семинарском занятии – 2 балла:

- за отличный ответ (полный, безошибочный) – 2 балла;
- за активную работу на семинаре (от 2 до 4 выступлений) – 1-2 балла;
- за неточное выступление, за неточное дополнение — 1 балл;
- за отказ от ответа, за неправильный ответ – 0 баллов.

2) Рейтинг контрольных точек – 25 баллов.

3) Рейтинг посещения лекционных занятий – 6 баллов.

4) Рейтинг посещения семинарских занятий – 7 баллов.

5) Рейтинг поощрительный – 10 баллов:

- разработка сценария деловой игры – 10 баллов;
- составление кроссвордов – 5 баллов;
- решение задач повышенной сложности – 5-10 баллов;
- Написание и защита реферата – 3-7 баллов.

Сдача экзамена – 30 баллов.

Пересчет суммы баллов в традиционную и международную оценку

| Оценка (ФГОС) | Итоговая сумма баллов, учитывает успешно сданный экзамен | Оценка (ECTS) |
|-------------------------|--|-------------------------|
| 5 (отлично) | 90 - 100 | A (отлично) |
| 4 (хорошо) | 85 – 89 | B (очень хорошо) |
| | 75 – 84 | C (хорошо) |
| | 70 - 74 | D (удовлетворительно) |
| 3 (удовлетворительно) | 65 – 69 | E (посредственно) |
| | 60 - 64 | F (неудовлетворительно) |
| 2 (неудовлетворительно) | Ниже 60 баллов | F (неудовлетворительно) |

2. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

2.1. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Контрольная работа №1.

1. Вычислить пределы:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^3 + 5}$; | 2) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}$; |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6x+1} - 5}{\sqrt{x} - 2}$; | 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{5+2x} \right)^{3x}$; |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\cos x - \cos^3 x}$; | 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x} - 2}$. |

2. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематический график функции в окрестности точки разрыва.

$$1) f(x) = 5^{\frac{x}{x+3}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 3 \\ \frac{6}{x}, & x > 3 \end{cases}.$$

Контрольная работа №2.

1. Найти y' :

а) $y = 2x^3 - \sqrt[3]{x^2} + 3^x + 5$; б) $y = \sqrt{2x - x^3} + (2x^2 + 5)^2$;

$$B) y = x \cdot \operatorname{tg}(2x);$$

$$Г) y = \frac{\sin 2x}{1-x} + \cos^5 3x.$$

2. Записать дифференциалы dy и d^2y для функции $y = e^{\sin 2x}$.

Контрольная работа №3.

1) Найти частные производные 1-го порядка функций:

$$a) z = x^2y - 3x + \sqrt{y} - 2; \quad б) u = xyz - \frac{y}{x} - \frac{\sqrt{x}}{y^2z}.$$

2) Найти частные производные 2-го порядка функции $z = x + e^{xy}$.

3) Найти dz , если $z = \ln \cos(x-y)$, $x = e^{-2t}$, $y = \cos^2 t$.

4) Записать уравнение касательной плоскости P и уравнения нормали N к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ в точке $M_0(-1, 2, 2)$.

5) Для функции $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ в точке $M_0(1, 1)$ найти:

а) производную по направлению вектора $\vec{a} = (1, -1)$;

б) градиент;

в) модуль градиента.

6) Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 3x^2 - 9x + y^2 + 4y - 1$.

Контрольная работа №4.

Вычислить неопределённые интегралы:

$$1) \int \left(2x - \frac{3}{x} + 6 \right) dx;$$

$$2) \int \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x^3} - \frac{5}{\sin^2 x} + 2^x \right) dx;$$

$$3) \int (3x-1)^9 dx;$$

$$4) \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};$$

$$5) \int (x-1) \ln x dx;$$

$$6) \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx;$$

$$7) \int \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}} dx;$$

$$8) \int \sin^3 5x dx.$$

Контрольная работа №5.

1. Найти общее решение уравнений:

$$a) y' = 2x - 1; \quad б) xy' + y = x^3.$$

2. Найти решение задачи Коши:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y, \quad y(1) = 1;$$

3. Найти решение задачи Коши, определив частное решение методом неопределённых коэффициентов:

$$y'' + y = 6x^2 + 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}.$$

Контрольная работа №6.

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{2n}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{5n+1}\right)^{-n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n} \cdot 2^n$; д) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{(1 \cdot 2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$

2. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot (x+2)^n}{n+1}$.

Примеры тестирования.

1. Результат действия $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ равен...

- а. $\sqrt{2,5}$
- б. $\sqrt{10}$
- в. $\sqrt[4]{2,5}$
- г. 2,5

2. Результат сложения дробей $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ равен...

- а. $\frac{2}{5}$
- б. $\frac{5}{6}$
- в. $\frac{1}{5}$
- г. 1

3. Результат действия $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$ равен...

- а. 2

- b. $\frac{1}{2}$
 - c. 4
 - d. -2
4. Решение уравнения $x^2=4$ равно...
- a. 2
 - b. -2
 - c. ± 2
 - d. 16
5. Разложение на множители выражения x^2-9 имеет вид...
- a. $(x-3)(x+3)$
 - b. $(x-3)(x-3)$
 - c. $(x+3)(x+3)$
 - d. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)$
6. Решением уравнения $x^3-1=0$ является...
- a. $x=1$
 - b. $x=-1$
 - c. $x=0$
 - d. $x=\pm 1$
7. Производная функции $y= x^2$ равна...
- a. $2x+1$
 - b. $2x$
 - c. x
 - d. 2
8. Количество корней уравнения $x(x^2 + 2x - 3) = 0$ равно...
- a. 2
 - b. 3
 - c. 1
 - d. 0

ТЕСТ 2

1. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 2}$ равен...
- a. ∞
 - b. 3
 - c. 1,5
 - d. -1
2. Предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ равен...
- a. 0
 - b. $\frac{1}{2}$

c. 1

d. $-\frac{1}{2}$

3. Точка разрыва функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1 \\ 4 - 3x, & \text{если } 1 < x < 2 \\ x + 1, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$ равна...

a. 1

b. 3

c. 2

d. -2

4. Для функции $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ точка $x=3$ является точкой...

a. разрыва первого рода

b. непрерывности

c. разрыва второго рода

d. устранимого разрыва

5. Производная функции $y = x^2 \cos 2x$ равна ...

a. $y = x(2\cos 2x - x \sin 2x)$

b. $y = 2x(\cos 2x + x \sin 2x)$

c. $y = 2x(\cos 2x - x \sin 2x)$

d. $y = -4x \sin 2x$

6. Производная второго порядка функции $y = \ln(3 - 2x)$ равна...

a. $-\frac{2}{(3-2x)^2}$

b. $\frac{2}{(3-2x)^2}$

c. $-\frac{4}{(3-2x)^2}$

d. $\frac{4}{(3-2x)^2}$

7. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \ln(x^2 y - 3y + 1)$ имеет вид...

a. $\frac{2xy}{x^2 y - 3y + 1}$

b. $\frac{x^2 - 3}{x^2 y - 3y + 1}$

c. $\frac{x^2 + 2xy - 3}{x^2 y - 3y + 1}$

d. $\frac{1}{x^2 y - 3y + 1}$

8. Неопределенный интеграл $\int e^{x^2} x dx$ равен...

a. $e^{x^2} + c$

b. $e^{x^2} x^2 + c$

c. $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

d. $\frac{1}{3} e^{x^2} + c$

9. Неопределенный интеграл $\int \sin(3x + 1) dx$ равен...

a. $\cos(3x + 1) + c$

b. $3\cos(3x + 1) + c$

c. $\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + c$

d. $-\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + c$

10. Определенный интеграл $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{1 + x^3}$ равен...

a. $\frac{1}{3} \ln 7$

b. $\frac{1}{3} \ln 9$

c. $\frac{1}{3} \ln 4,5$

d. $\frac{1}{3} \ln 18$

ТЕСТ 3

1. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}$ равен...

a. 4

b. 1

c. 0

d. 2

2. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$ равен...

a. 0

b. $+\infty$

c. $\sqrt{3}$

d. 1

3. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{x+2}$ равен...

- a. ∞
- b. e^{-2}
- c. e^2
- d. 1

4. Количество точек разрыва функции $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-4)}$ равно ...

- a. 4
- b. 2
- c. 3
- d. 1

5. Точка разрыва функции $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 4}$ равна...

- a. -2
- b. 0
- c. 1
- d. 2

6. Производная функции $y = \arcsin \sqrt{x}$ равна...

- a. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
- b. $\frac{2}{\sqrt{x-x^2}}$
- c. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
- d. $-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

7. Производная функции $y = \ln \frac{x+1}{x-2}$ равна...

- a. $-\frac{1}{(x+1)(x-2)}$
- b. $\frac{x-2}{x+1}$
- c. $\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)}$
- d. $-\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

8. Производная второго порядка функции $y = \frac{x-3}{x+2}$ равна...

- a. $\frac{5}{(x+2)^3}$
- b. $-\frac{5}{(x+2)^3}$
- c. $\frac{10}{(x+2)^3}$
- d. $-\frac{10}{(x+2)^3}$

9. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = \arcsin x^2 y$ имеет вид...

- a. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4 y^2}}$
- b. $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4 y^2}}$
- c. $\frac{2xy}{\sqrt{1-x^4 y^2}}$
- d. $\frac{2xy}{\sqrt{1+x^4 y^2}}$

10. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = x^2 y^2 - xy + 2y + 4$ имеет вид ...

- a. $2y^2$
- b. $2x^2$
- c. $4xy - 1$
- d. $2xy^2 - y$

11. Неопределенный интеграл $\int x^2 \ln x dx$ равен...

- a. $\frac{x^3}{9}(\ln x - 1) + C$
- b. $\frac{x^2}{3}(x \ln x - 1) + C$
- c. $\frac{x^3}{9}(3 \ln x + 1) + C$
- d. $\frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + C$

12. Неопределенный интеграл $\int \frac{(2\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$ равен...

a. $4x - \frac{2}{\sqrt{x}} + \ln|x| + C$

b. $4x - 8\sqrt{x} + \ln|x| + C$

c. $4x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$

d. $4x + 8\sqrt{x} + \ln|x| + C$

13. Определенный интеграл $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$ равен...

a. 1

b. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

c. 2

d. $\frac{1}{2}$

14. Общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$ имеет вид...

a. $y = C - x, C \in R$

b. $y = \frac{C}{x}, C \in R$

c. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = C, C \in R$

d. $y = Cx, C \in R$

15. Общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 0$ имеет вид...

a. $y = C - x^2, C \in R$

b. $y = C - e^{-x^2}, C \in R$

c. $y = C + e^{-x^2}, C \in R$

d. $y = Ce^{-x^2}, C \in R$

16. Частное решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$, имеет вид...

a. $y = 2tg2x - 2$

b. $y = \frac{1}{2}tg2x - \frac{1}{2}$

c. $y = \frac{1}{2}tg2x + \frac{1}{2}$

d. $y = tg2x - 1$

17. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0$ имеет вид...

a. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

b. $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x$

c. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

d. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

18. Даны числовые ряды:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Тогда...

a. ряд A) расходится, ряд B) расходится

b. ряд A) сходится, ряд B) расходится

c. ряд A) сходится, ряд B) сходится

d. ряд A) расходится, ряд B) сходится

19. Числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ сходится при α , равном...

a. 1

b. 0,5

c. 2

d. 0

20. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ равен...

a. $(-3;3)$

b. $(-1;1)$

c. $(0;3)$

d. $(-3;0)$

Примеры практических заданий.

Практические задания.

1) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{6x^2 + 2x - 1}$.

2) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$.

3) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

4) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

5) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

6) Вычислить предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Практические задания:

1) Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1. \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

2) Исследовать функцию $y = 4^{\frac{1}{2-x}}$ на непрерывность. Указать тип точек разрыва, сделать схематический рисунок.

3) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$.

4) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{3x^2}$.

5) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{2x}$.

6) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{-x}$.

Практические задания:

1) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2}$.

2) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 - \cos x}$.

3) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$.

4) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1 - 2x^2)}$.

5) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{4} x}{x^2 - 2x}$.

Практические задания:

1) Найти производную функции: $y = \frac{x^5}{5} - x^{-4} + \sqrt{x}$.

2) Найти производную функции: $y = \frac{5x - 8}{7}$.

3) Найти производную функции: $y = \left(\sqrt[3]{x^2} + x \cdot \sqrt[5]{x} \right) \cdot \log_2 x$.

4) Найти производную функции: $y = \frac{e^x}{x - 1}$.

5) Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Практические задания:

1) Найти производную функции: $y = 4\sqrt{(x^2 + 3x)^3} - \sqrt[5]{(6x - 1)^2}$.

2) Найти производную функции: $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1 - x^8}$.

3) Найти производную функции: $y = x^2 e^{x^2} \ln x$.

4) Найти производную функции: $y = (a^3 - x^3)^2 \cdot \sin^2 3ax$.

5) Вычислить $\frac{dy}{dx}$ для функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

при $t=0$.

6) Найти производную функции: $\frac{y}{x} + xy = \arcsin(x - y)$.

Практические задания:

1) Найти производную функции: $y = (\sin 4x)^{3x}$.

2) Найти производную функции: $y = (\operatorname{tg} 2x)^{-2x}$.

2) Найти производную второго порядка функции: $y = e^{-x} + \ln \frac{1}{x}$.

3) Найти дифференциал функции: $y = 4^{\log_3 5x}$.

4) Найти дифференциал функции: $y = x - \ln\left(2 + e^{-x} + 2\sqrt{e^{2x} + e^{-x} + 1}\right)$.

5) Вычислить $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

при $t=0$.

Практические задания:

1) Вычислить предел по правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$.

2) Вычислить предел по правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2x}$.

3) Вычислить предел по правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{x^3 - 27}$.

4) Вычислить предел по правилу Лопиталья: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Практические задания:

1) Найти интервалы монотонности и экстремум функции $y = \frac{x+3}{x^2+7}$.

2) Найти область определения, интервалы монотонности, выпуклости и асимптоты: $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

3) Исследовать и построить график функции: $y = e^{2x-x^2}$.

4) Исследовать и построить график функции: $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

5) Найти наименьшее значение функции $y = 1 + 3x^2 - x^3$ на отрезке $[-2; 1]$.

6) Найти наибольшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$ на отрезке $[0; 3]$.

Практические задания:

1) Для заданной функции найти все частные производные первого порядка: $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{\sqrt{x}}{y}$.

2) Для функции $z = \ln(2x - y)$ найти все частные производные 1-го и 2-го порядка.

3) Найти все частные производные первого порядка для функции:

$$z = xy - \frac{x}{y}.$$

4) Для заданной функции найти требуемые частные и смешанные производные: $z = \ln xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$.

Практические задания:

1) Найти полный дифференциал функции:

$$U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

2) Найти полный дифференциал функции: $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

3) Исследовать на экстремум функцию: $z = f(x, y)$, $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

4) Исследовать на экстремум функцию: $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$.

5) Найти наименьшее m и наибольшее M значения функции $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ в области G : $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$.

Практические задания:

1) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в указанной точке M_0 : $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$; $M_0(1; 0; 1)$.

2) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $xyz = x + y + z$ в точке $M(0; 1; -1)$.

3) Для функции $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ вычислить градиент и производную в направлении вектора

$$\vec{l} = l_x \cdot \vec{i} + l_y \cdot \vec{j}, \quad z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1; \quad \vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}; \quad A(2; 1).$$

4) Найти $\operatorname{grad} u(M)$ и $|\operatorname{grad} u(M)|$ в точке $M(1, 1, 1)$ для функции $u = \ln(3 - x^2) - 8xyz$.

Практические задания:

1) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx$.

2) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{2x-3}$.

3) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$.

4) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

5) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$.

Практические задания:

1) Вычислить неопределенный интеграл: $\int (4-3x)e^{-3x} dx$.

2) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx$.

3) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx$.

4) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{5-4x-x^2}{x^3-3x^2+4} dx$.

Практические задания:

1) Вычислить неопределенный интеграл: $\int x(x^2+1)^{3/2} dx$.

2) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$.

3) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \sin 2x \cos 3x dx$.

4) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \sin^2 4x dx$.

5) Вычислить неопределенный интеграл: $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Практические задания:

1) Вычислить определённый интеграл: $\int_0^1 \frac{4\arctg x - x}{1+x^2} dx$.

2) Вычислить определённый интеграл: $\int_0^8 3(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$.

3) Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_0^{\infty} \cos x dx$.

4) Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x)(x-2)}$.

Практические задания:

- 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $x = 4 - (y-1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.
- 2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.
- 3) Найти длину дуги линии: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
- 4) Вычислить $\int_L (x^2 + y^2) dl$, где L – отрезок прямой от точки $A(1, 2)$ до точки $B(3, 2)$.

Практические задания:

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $(1 + e^x) y dy - e^x dx = 0$.
- 2) Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$.
- 3) Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $xy' = (1 - 2y) \ln x$.
- 4) Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
- 5) Решить задачу Коши: $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$.

Практические задания:

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' + y = x^3$.
- 2) Решить задачу Коши: $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$, $y(0) = 1$.
- 3) Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0$.
- 4) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Практические задания:

- 1) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' = \sin 3x + 2$.

2) Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y''x \ln x = y'$, $y(e) = e - 1$, $y'(e) = 1$.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$yy'' + (y')^2 = (y')^3, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

Практические задания:

1) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 2y' + y = 0$.

2) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' + y' - 6y = 0$.

3) Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

4) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 2y' + 5y = x^2 - 1.$$

5) Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y' - 2y = 3e^x - 2x.$$

6) Найти решение задачи Коши, определив частное решение методом неопределённых коэффициентов: $y'' + 2y' = 2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7) Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + y = 3z \\ \frac{dz}{dx} = 2y - 2z \end{cases}.$$

Практические задания:

1) Записать общий член a_n ряда $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ и проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости.

2) Исследовать на сходимость знакоположительный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

3) Исследовать на сходимость знакоположительный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4) Исследовать на сходимость знакоположительный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2(n+2)}.$$

5) Исследовать на сходимость знакоположительный ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^2+1}$.

6) Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

7) Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3n^3}$.

Практические задания:

1) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$.

3) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5nx^n}{n^2+4}$.

4) Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Практические задания:

1) Записать формулу Тейлора до 3-го порядка включительно для функции $y = \frac{x}{x+1}$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

2) Разложить функцию $f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - 1$ в ряд Маклорена и указать его интервал сходимости.

2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к зачету.

1) Предел последовательности. Сходящиеся последовательности. Примеры.

2) Достаточное условие сходимости монотонной числовой последовательности.

3) Предел функции. Односторонние пределы.

4) Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Связь между функцией, её пределом и бесконечно малой величиной.

5) Арифметические свойства предела функции.

- 6) Первый замечательный предел.
- 7) Второй замечательный предел.
- 8) Непрерывность функции в точке.
- 9) Точки разрыва функции. Точка разрыва 1-го рода; точка разрыва 2-го рода; устранимая точка разрыва.
- 10) Свойства функций, непрерывных в точке.
- 11) Свойства функций, непрерывных на отрезке.
- 12) Непрерывность элементарных функций.
- 13) Основные эквивалентности бесконечно малых функций.
- 14) Эквивалентность бесконечно больших функций. Использование эквивалентностей при вычислении пределов.
- 15) Производная функции.
- 16) Механический и геометрический смысл производной.
- 17) Уравнение касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$.
- 18) Связь непрерывности и дифференцируемости в точке.
- 19) Правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций.
- 20) Правило дифференцирования сложной функции.
- 21) Правила дифференцирования основных элементарных функций.
- 22) Правило дифференцирования параметрически заданной функции.
- 23) Дифференцирование неявно заданной функции.
- 24) Логарифмическое дифференцирование.
- 25) Дифференциал функции.
- 26) Геометрический смысл дифференциала функции.
- 27) Производные и дифференциалы высших порядков.
- 28) Теоремы о среднем.
- 29) Правило Лопиталю.
- 30) Формула Тейлора. Разложения по формуле Маклорена для функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$.
- 31) Достаточный признак монотонности дифференцируемой функции.
- 32) Экстремум функции. Необходимый признак экстремума.
- 33) Достаточный признак экстремума.
- 34) Определение выпуклости, вогнутости графика функции.
- 35) Точки перегиба. Необходимый и достаточный признак существования точки перегиба.
- 36) Асимптоты графика функции.
- 37) Необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты.
- 38) Общая схема исследования функции и построение её графика.
- 39) Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке.
- 40) Функция нескольких переменных. Примеры.

- 41) Предел функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Непрерывность функции $f(M)$ в точке M_0 .
- 42) Частные производные.
- 43) Дифференцируемой функции нескольких переменных.
- 44) Дифференциал функции нескольких переменных.
- 45) Частные производные и дифференциалы высших порядков.
- 46) Точки экстремума функции нескольких переменных. Необходимый признак экстремума функции нескольких переменных.
- 47) Достаточный признак экстремума функции нескольких переменных.
- 48) Наибольшее и наименьшее значения функции 2-х переменных в замкнутой области.
- 49) Производная по направлению скалярного поля. Градиент скалярного поля. Связь между производной по направлению и градиентом.
- 50) Касательная плоскость и нормаль к пространственной кривой.

Задачи к зачету.

Задача №1.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{5x-3}$.

Задача №2.

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{e^{x-2} - 1}$.

Задача №3.

Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематический график функции $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

Задача №4.

Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их тип. Построить схематический график функции

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{9}{x}, & x > 3 \end{cases}$$

Задача №5.

Найти производную функции: $f(x) = 2 - x + 4x^3 + \sqrt[4]{x}$.

Задача №6.

Найти производную функции: $f(x) = (1 - 2x)^3 \cdot \sin 3x$.

Задача №7.

Составить уравнение касательной к кривой $y = x^3 + 2x - 5$ в точке $(1, -2)$.

Задача №8.

Исследовать функцию $f(x) = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ на экстремум.

Задача №9.

Найти частные производные 1-го порядка функции: $z = x^2 y - \frac{x}{y} + 2x - 1$.

Задача №10.

Найти производную функции $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M(1, 1)$ в направлении от этой точки к точке $N(4, -3)$.

Задача №11.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 9xy + 2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств: $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$.

Вопросы к экзамену

- 1) Первообразная функции. Примеры.
- 2) Теорема о множестве всех первообразных для функции.
- 3) Неопределённый интеграл.
- 4) Основные свойства неопределённого интеграла.
- 5) Метод интегрирования: подстановкой или замена переменной.
- 6) Метод интегрирования по частям.
- 7) Метод интегрирования рациональных дробей.
- 8) Интегрирование иррациональных выражений, содержащих квадратный трёхчлен.
- 9) Общий метод интегрирования тригонометрических функций.
- 10) Методы вычисления интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n – целые числа.
- 11) Определённый интеграл от данной функции на данном отрезке.
- 12) Основные свойства определённого интеграла.
- 13) Геометрический смысл определённого интеграла от данной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
- 14) Теорема Барроу об интеграле с переменным верхним пределом.
- 15) Формула Ньютона – Лейбница.
- 16) Метод замены переменной (подстановки) в определённом интеграле.

17) Несобственный интеграл от данной функции по бесконечному интервалу.

18) Несобственный интеграл от неограниченной функции.

19) Геометрические приложения определённого интеграла.

20) Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Определение общего и частного решения.

21) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

22) Однородные дифференциальные уравнения.

23) Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

24) Дифференциальные уравнения Бернулли.

25) Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие.

26) Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Задача Коши. Общее и частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

27) Способ решения дифференциального уравнения $y'' = f(x)$.

28) Способ решения дифференциального уравнения $y'' = f(x, y')$.

29) Способ решения дифференциального уравнения $y'' = f(y, y')$.

30) Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка. Свойства решений. Понятие фундаментальной системы решений.

31) Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

32) Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

33) Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае различных действительных характеристических чисел.

34) Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае одинаковых действительных характеристических чисел.

35) Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных характеристических чисел.

36) Нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

37) Нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x]$.

38) Нормальная система 2-х дифференциальных уравнений. Задача Коши. Общее и частное решение системы дифференциальных уравнений.

39) Решение однородной линейной системы 2-х дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

40) Понятие ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры.

- 41) Необходимый признак сходимости ряда. Примеры.
- 42) Интегральный признак сходимости. Сходимость ряда Дирихле.
- 43) 1-й признак сравнения знакоположительных рядов.
- 44) 2-й признак сравнения знакоположительных рядов.
- 45) Признак сходимости Даламбера.
- 46) Признак сходимости Коши.
- 47) Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.
- 48) Абсолютная и условная сходимость знакочередующегося ряда.

Примеры.

- 49) Степенной ряд.
- 50) Теорема Абеля. Нахождение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
- 51) Свойства степенных рядов.
- 52) Разложение функции в степенной ряд.
- 53) Ряд Тейлора функции $f(x)$. Определение коэффициентов ряда Тейлора.
- 54) Необходимые и достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.
- 55) Разложения в ряд Маклорена функций e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^a$, $\ln(1+x)$, $\arcsin x$, $\arctg x$.
- 56) Приближенное вычисление значения функции с помощью степенных рядов. Пример.
- 57) Метод интегрирования функций с помощью степенных рядов. Пример.
- 58) Метод интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов. Пример.

Задачи к экзамену.

Задача №1.

Вычислить неопределенный интеграл: $\int \left(2x - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} - 3 \right) dx$.

Задача №2.

Вычислить неопределенный интеграл: $\int x^2 \ln x dx$.

Задача №3.

Вычислить определенный интеграл: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$.

Задача №4.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' - 1 = 2y$.

Задача №5.

Найти общее решение дифференциального уравнения:
 $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$.

Задача №6.

Решить задачу Коши: $y'' = \frac{y'}{x}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Задача №7.

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + y = x + 1$.

Задача №8.

Исследовать на сходимость числовой ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

Задача №9.

Исследовать на сходимость знакочередующийся числовой ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$.

Задача №10.

Найти область сходимости степенного ряда: $\frac{x+3}{1} + \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(x+3)^3}{9} + \dots$

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ.

3.1. Текущий контроль успеваемости студентов

Текущий контроль успеваемости – это установление уровня знаний, умений, владений студентов по отношению к объему и содержанию разделов (модулей, частей) учебных дисциплин, представленных и утвержденных в учебных планах и учебных программах.

Текущий контроль успеваемости осуществляется через комплекс испытаний студентов в виде устных и письменных опросов, коллоквиумов, контрольных работ, проверки домашних заданий, защиты отчетов, компьютерного и бланочного тестирования. Возможны и другие виды контроля по усмотрению кафедры, обеспечивающей учебный процесс по данной дисциплине, в том числе, контроль посещаемости занятий.

В систему текущего контроля рекомендуется вводить необязательные мероприятия, позволяющие повысить семестровый рейтинг, например, участие в олимпиадах, научное исследование, участие в научных конференциях с докладом по теме изучаемого предмета и т.д. с назначением определенных баллов, прибавляемых к семестровому рейтингу по дисциплине. При этом рейтинг не должен превышать 100 баллов.

Для текущего контроля успеваемости на кафедрах, осуществляющих учебный процесс, создаются и периодически актуализируются банки тестов, заданий, программы компьютерных проверок и т.п. материалы.

Виды и сроки проведения мероприятий текущего контроля устанавливаются рабочей программой учебной дисциплины.

3.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация студентов – это установление уровня знаний, умений, владений обучаемых, как показателя уровня освоения требуемых компетенций, по отношению к объему и содержанию семестровых частей учебных дисциплин или дисциплин в целом.

Оценка промежуточной аттестации студента по дисциплине формируется на основании семестрового рейтинга текущего контроля и рейтинга зачетного и/или экзаменационного испытания.

Зачетное/экзаменационное испытание проводится в сроки, устанавливаемые в соответствии с утвержденными учебными планами, календарными учебными графиками, приказами.

Преподаватель имеет право принять у студента зачет и/или экзамен только при наличии первичных документов по учету результатов промежуточной аттестации. Первичными документами являются экзаменационные и зачетные ведомости, индивидуальные разрешения на сдачу зачетов, экзаменов, курсовых проектов (работ). Все первичные документы должны передаваться в деканат преподавателем лично не позднее следующего дня после проведения испытания промежуточной аттестации.

По результатам промежуточной аттестации студенту, кроме итогового рейтинга по 100-балльной шкале, выставляется итоговая отметка, которая может быть дифференцированной («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно»), либо недифференцированной («зачтено», «не зачтено»).

При аттестации на «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «зачтено» студент считается получившим положительную оценку и прошедшим промежуточную аттестацию. Положительные оценки и соответствующие рейтинги заносятся в первичные документы и зачетные книжки студентов. Записи в зачетных книжках студентов должны осуществляться только после оформления первичных документов.

Оценки «неудовлетворительно» и «не зачтено» проставляются только в первичные документы.

Неудовлетворительные результаты промежуточной аттестации по одному или нескольким учебным курсам, дисциплинам (модулям) образовательной программы или непрохождение промежуточной аттестации в установленные сроки признаются академической задолженностью. Студенты обязаны ликвидировать академическую задолженность.

Виды и сроки проведения мероприятий промежуточной аттестации устанавливаются рабочей программой учебной дисциплины.